弱鏡映部分多様体とその周辺の話題*

酒井 高司

大阪市立大学理学研究科

導入

Harvey-Lawson [6] は形作用素がある種の対称性を持つ極小部分多様体として austere 部分多様体の概念を提起した．論文 [9] において，超球面内に austere 部分多様体がどの程度存在するかを見るために，既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道で超球面内の austere 部分多様体になるものを分類した（定理 2.3）．これらの軌道をさらに詳しく調べてみると，分類で得られた austere 軌道の多くは法ベクトルの方向を裏返す等長変換によって不変になる大域的な対称性を持つことに気がついた．この性質は鏡映部分多様体の条件を弱めたものになっており，Podestà [17] による余等質性 1 の等長変換群の作用の特異軌道が austere 部分多様体になることの証明とも関係がある．そこで，この性質を持つ部分多様体を弱鏡映部分多様体と名付け，その基本的な性質を調べた．さらに，既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道であって超球面内の弱鏡映部分多様体になるものを分類した（定理 2.3）．

Ferus [5] は球面内の部分多様体の Gauss 写像の退化次数に関する不等式を与え，Gauss 写像がある次数以上退化すると部分多様体は全測地的な球面になることを示した．石川-木村-宮岡 [12, 13] は球面内の等質等径超曲面の理論を使って Gauss 写像が退化する部分多様体の研究を行い，等質超曲面とそれらの焦点部分多様体のいくつかについて実際に Gauss 写像が退化することを示した．さらに，これらの例から Ferus の不等式の等号を満たす例を見つけた．球面内の等質超曲面は階数 2 の Riemann 対称対の s 表現の軌道として得られることが知られている．そこで，論文 [10] では既約 Riemann 対称対の s 表現の軌道の中で Gauss 写像が退化するものを分類した (定理 3.5)．さらに，これらの軌道の中から Ferus の不等式の等号を満たす部分多様体の新しい例が数多く得られた．分類によって得られた Gauss 写像が退化する軌道は全て弱鏡映部分多様体になっていることを注意しておく．

元々，austere 部分多様体の概念は $\mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成するために導入された．Calabi-Yau 多様体内の特殊 Lagrange 部分多様体はキャリブ

*本研究は科学研究費補助金 若手研究 (B) 20740044 の助成を受けたものである．

レート部分多様体であり，したがってホモロジー類内での体積最小性という顕著な性質を持つ．

Stenzel [18] は階数 1 のコンパクト対称空間の余接束に余等質性 1 の Calabi-Yau 計量を構成している．特に，2 次元球面の余接束 T^*S^2 の場合は Eguchi-Hanson 計量になる．4 節では T^*S^n の Stenzel 計量に関する特殊 Lagrane 部分多様体を構成する二つの手法について解説する．一つは Karigiannis-Min-Oo [14] による S^n 内の部分多様体の余法束として T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する方法である．これは Havery-Lawson の余法束の手法の類似になる．2 節で分類した s 表現の austere 軌道から T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成することができる．もう一つは，Stenzel 計量の対称性に注目して，余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する方法である．これは Anciaux [1] による構成法の拡張になる．

1 弱鏡映部分多様体の定義と基本的な性質

定義 1.1 ([9]) $\tilde{M}$ を Riemann 多様体，M を $\tilde{M}$ の部分多様体とする．各点 $x \in M$ における各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して次の条件を満たす $\tilde{M}$ の等長変換 σ_ξ が存在するとき，M を弱鏡映部分多様体という．

$$\sigma_\xi(x) = x, \qquad (d\sigma_\xi)_x\xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(M) = M. \tag{1.1}$$

σ_ξ を法ベクトル ξ に関する M の鏡映と呼ぶ．

例 1.2

$$S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x, y \in S^{n-1}(1)\}$$

は半径 $\sqrt{2}$ の $(2n-1)$ 次元球面 $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ の弱鏡映部分多様体になる．

定義 1.3 (Leung [16]) $\tilde{M}$ を完備 Riemann 多様体とする．$\tilde{M}$ の対合的等長変換 σ_M の固定点集合の連結成分 M を鏡映部分多様体という．σ_M を M の鏡映と呼ぶ．

鏡映部分多様体 M は $\tilde{M}$ の全測地的部分多様体になる．M の鏡映 σ_M は任意の点 $x \in M$ における任意の法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して条件 (1.1) をみたす．したがって，鏡映部分多様体は弱鏡映部分多様体である．

定義 1.4 (Harvey-Lawson [6]) $\tilde{M}$ を Riemann 多様体，M を $\tilde{M}$ の部分多様体とする．M の各点の各法ベクトル ξ に対して M の形作用素 A_ξ の固有値全体のなす集合が -1 倍に関して不変であり，-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき，M を austere 部分多様体という．

定義から明らかに austere 部分多様体は極小部分多様体である．特に，M が 2 次元の場合 M が austere 部分多様体であることと極小曲面であることは同値である．

また，弱鏡映部分多様体は austere 部分多様体になる．実際，M を Riemann 多様体 $\tilde{M}$ の弱鏡映部分多様体とすると，各点 $x \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp} M$ に対して鏡映 σ_ξ が存在する．このとき，$(d\sigma_\xi)_x^{-1} A_\xi (d\sigma_\xi)_x = -A_\xi$ が成り立つ．これより，$(d\sigma_\xi)_x$ は A_ξ の固有値 λ の固有空間と固有値 $-\lambda$ の固有空間の間の同型対応を与える．したがって，M は austere 部分多様体になる．まとめると，これらの部分多様体のクラスについて次の包含関係が成り立つ．

命題 1.5　　鏡映 $\subset$ 弱鏡映 $\subset$ austere $\subset$ 極小

次の命題は本質的には Podestà [17] による．

命題 1.6 Riemann 多様体の余等質性 1 の等長変換群の特異軌道は弱鏡映部分多様体になる．

コンパクト対称空間の余等質性 1 の作用は Kollross [15] により分類されている．また，非コンパクト対称空間の場合は Berndt-田丸 [2] などの研究結果がある．ゆえに，これらの結果から対称空間内の弱鏡映部分多様体の例を得ることができる．

命題 1.6 の証明の概略　Lie 群 G の Riemann 多様体 $\tilde{M}$ への等長作用の余等質性が 1 であるとする．$x \in \tilde{M}$ を通る軌道 $G(x)$ が特異軌道であるとすると，スライス表現定理より x におけるイソトロピー群 G_x は $T_x^{\perp}(G(x))$ の超球面に推移的に作用する．特に，任意の $\xi \in T_x^{\perp}(G(x))$ に対してある $h \in G_x$ が存在し $dh_x(\xi) = -\xi$ が成り立つ．したがって，h は $G(x)$ の $\xi \in T_x^{\perp}(G(x))$ に関する鏡映になる．

命題 1.7 完備連結 Riemann 多様体の余等質性 1 の連結等長変換群が二つの特異軌道を持っていると仮定する．もし弱鏡映な主軌道が存在すれば，それは二つの特異軌道から等しい距離にあり，二つの特異軌道は等長的になる．

証明の概略　もし弱鏡映な主軌道が存在したとすると，その鏡映はその超曲面を保存し，同時にその超曲面からから等距離にある 2 つの平行超曲面を互いに移り合わせる．特に，焦点部分多様体である特異軌道は鏡映によって互いに移りあわなければならない．

2　s 表現の弱鏡映軌道と austere 軌道

Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現は s 表現と呼ばれる．この節では s 表現の軌道で球面内の austere 部分多様体になるものと弱鏡映部分多様体になるものの分類結果を紹介する．

G を連結なコンパクト Lie 群とし，θ は G の対合的自己同型であるとする．K は G の閉部分群であり，$G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$ を満たすと仮定する．ここで，$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ であり，G_θ^0 は G_θ の単位元を含む連結成分を表す．このとき，(G, K) は

θ に関して対称対になる．G と K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{k}$ で表す．θ から誘導される $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型も θ で表すことにすると，θ によって $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

と標準分解される．ここで，$\mathfrak{m}$ は θ の (-1) 固有空間であり，対称空間 G/K の原点 $o = K$ における接空間と自然に同一視される．G/K の線形イソトロピー表現は G の随伴表現による K の $\mathfrak{m}$ への表現と同値になる．したがって，$H \in \mathfrak{m}$ を通る K 軌道を $\mathrm{Ad}(K)H$ と表す．s 表現は直交表現であるから，$\mathrm{Ad}(K)H$ は $\mathfrak{m}$ 内の半径 $\|H\|$ の超球面 S の部分多様体になる．

$\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり固定する．$\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{m}$ の部分空間 $\mathfrak{m}_\lambda$ を

$$\mathfrak{m}_\lambda = \{X \in \mathfrak{m} \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定める．また，$R = \{\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{m}_\lambda \neq \{0\}\}$ によって $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の制限ルート系 R を定める．R の基本系 F をとり，F に関する正の制限ルート系の集合を R_+ と表す．このとき，$\mathfrak{m}$ の制限ルート空間分解

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{m}_\lambda$$

が得られる．$\mathfrak{a}$ 内の Weyl 領域 C を

$$C = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in F)\}$$

によって定める．このとき対称空間の基本的な性質から

$$\mathrm{Ad}(K)\bar{C} = \mathfrak{m} \tag{2.1}$$

となる．さらに，全ての K 軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ は $\mathfrak{a}$ と直交し，C の閉包 $\bar{C}$ の 1 点を通る．よって，$S \cap \bar{C}$ を S への K 作用の軌道空間と同一視することができる．したがって，軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ の基点 H は $S \cap \bar{C}$ の点であると仮定してよい．

部分集合 $\Delta \subset F$ に対して

$$C^\Delta = \{H \in \bar{C} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in \Delta),\ \langle \beta, H \rangle = 0 \ (\beta \in F - \Delta)\}$$

とおく．このとき，分解

$$\bar{C} = \bigcup_{\Delta \subset F} C^\Delta$$

を得る．$\Delta_1, \Delta_2 \subset F$ について，$\Delta_1 \subset \Delta_2$ であることと $C^{\Delta_1} \subset \overline{C^{\Delta_2}}$ となることは同値である．

$H \in \mathfrak{m}$ に対して

$$Z_K^H = \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H = H\}$$

とおくと，Z_K^H は K の閉部分群であり，軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ は等質空間 K/Z_K^H と微分同型になる．

　$\Delta \subset F$ について

$$\begin{aligned} N_K^\Delta &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)C^\Delta = C^\Delta\}, \\ Z_K^\Delta &= \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)|_{C^\Delta} = 1\} \end{aligned}$$

とおくと，N_K^Δ と Z_K^Δ は K の閉部分群である．

命題 2.1 ([7]) $\Delta \subset F$ と $H \in C^\Delta$ について

$$Z_K^\Delta = Z_K^H = N_K^\Delta$$

が成り立つ．

　(2.1) 式より S への K 作用の軌道空間は

$$S \cap \bar{C} = \bigcup_{\Delta \subset F} (S \cap C^\Delta)$$

と分解される．命題 2.1 より，$\Delta \subset F$ について $H_1, H_2 \in C^\Delta$ ならば $Z_K^{H_1} = Z_K^\Delta = Z_K^{H_2}$ となり，二つの軌道 $\mathrm{Ad}(K)H_1$ と $\mathrm{Ad}(K)H_2$ は微分同型になる．さらに，$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset F$ であるとすると $C^{\Delta_1} \subset \overline{C^{\Delta_2}}$ となり，したがって $H_1 \in C^{\Delta_1}, H_2 \in C^{\Delta_2}$ について $Z_K^{H_1} = Z_K^{\Delta_1} \supset Z_K^{\Delta_2} = Z_K^{H_2}$ となる．ゆえに，軌道空間 $S \cap C$ の内点の軌道が主軌道である．$\Delta \subset F$ が真部分集合であるとき，$S \cap C^\Delta$ を通る軌道は特異軌道になる．このようにして，s 表現の軌道は軌道型で層分解される．

　超球面内の極小部分多様体になる軌道については次が知られている．

定理 2.2 ([8]) 部分集合 $\Delta \subset F$ に対して，$H \in C^\Delta$ が唯一つ存在して $\mathrm{Ad}(K)H$ は S の極小部分多様体となる．

　上の定理により，s 表現の軌道空間の層分解について各層に唯一つ極小軌道が存在する．しかし、一般にはどの軌道が極小であるかを指定することは難しい．そこで、次に s 表現の軌道であって，超球面の austere 部分多様体になるものと弱鏡映部分多様体になるものの分類を与える．超球面のこれらの部分多様体の性質はベクトル空間のスカラー倍で変らないので，超球面の半径を特定の値に限定はしない．また，ルートに関する記号は [4] に従う．

定理 2.3 既約コンパクト対称対の s 表現の軌道であって，超球面内の austere 部分多様体になるものは次のものに限られる．

(1) 制限ルートに対応するベクトルの軌道

(2) A_2 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ の既約コンパクト対称対の $2e_1 - e_2 - e_3$，$e_1 + e_2 - 2e_3$ に対応するベクトルの (特異) 軌道

(3) A_3 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ の既約コンパクト対称対の $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ に対応するベクトルの軌道

(4) D 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ の既約コンパクト対称対の e_1 に対応するベクトルの軌道

(5) D_4 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ の既約コンパクト対称対の $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$ に対応するベクトルの軌道

(6) B_2 型 $\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$ であり重複度が一定値な既約コンパクト対称対の $e_1 + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ に対応するベクトルの軌道 (正則軌道)

(7) G_2 型の既約コンパクト対称対の $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$ に対応するベクトルの軌道 (正則軌道)

さらに，(1)~(5) は超球面内の弱鏡映部分多様体になる．(6), (7) は弱鏡映にならない austere 軌道である．

証明の概略　まず，制限ルート $\lambda \in R$ に対応するベクトル H を通る軌道 $\mathrm{Ad}(K)H$ については λ に関する Weyl 群の作用で鏡映を構成することにより，弱鏡映部分多様体になることが示される．次に，制限ルートの軌道以外について形作用素の固有値を制限ルートを使って表す．このとき，austere の条件である形作用素の対称性は制限ルート系の対称性として記述することができる．この対称性を持つ H の可能性を各ルート型について決定することにより，(2)~(7) の austere 軌道の分類を得る．さらに，分類した austere 軌道の中で弱鏡映になるものについてはそれぞれ鏡映を具体的に構成する．多くは Weyl 群の作用を使って鏡映を構成することができる．

(6), (7) の場合，特異軌道は二つになり，イソトロピー部分群を比較するとこれらの特異軌道は等長的ではないことがわかる．よって，命題 1.7 よりこれらの正則軌道は弱鏡映部分多様体にならないことが示される．

3　Gauss 写像の退化する軌道

l 次元多様体 M^l の n 次元球面 S^n へのはめ込み $f : M \longrightarrow S^n$ に対して，f の Gauss 写像 γ を M から $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の $l+1$ 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ への写像として次で定義する．

$$\begin{array}{rcl} \gamma : M & \longrightarrow & G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ x & \longmapsto & \mathbb{R}f(x) \oplus T_{f(x)}(f(M)) \end{array}$$

f の Gauss 写像 γ の最大階数を r で表す．Gauss 写像 γ が退化しているとき，つまり $r < l$ となるとき，はめ込まれた部分多様体 $f(M) \subset S^n$ は tangentially degenerate と呼ばれる．γ が値が一定になること，つまり $r = 0$ となることは f が全測地的であることと同値である．

はめ込み f の第二基本形式と形作用素をそれぞれ h と A で表し，$x \in M$ における相対零化空間 $\mathcal{N}_x$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_x &= \{X \in T_xM \mid h(X,Y) = 0,\ {}^{\forall}Y \in T_xM\}\\ &= \bigcap_{\xi \in T_x^{\perp}M} \ker(A_\xi)\end{aligned}$$

によって定める．$\ker(d\gamma)_x = \mathcal{N}_x$ となることから，$\mathcal{N}_x$ の次元は Gauss 写像の退化次数に一致する．

M^l を l 次元連結コンパクト多様体とし，はめ込み $f : M \longrightarrow S^n$ が tangentially degenerate であるとする．Ferus [5] は M の次元 l だけに依存する自然数 $F(l)$ が存在して，もし $r < F(l)$ ならば $r = 0$，つまり $f(M)$ は S^n 内の l 次元の great sphere になることを示した．自然数 $F(l)$ は Ferus 数と呼ばれ

$$F(l) = \min\{k \mid A(k) + k \geq l\}$$

によって与えられる．ここで，$A(k)$ は球面 S^{k-1} 上の線形独立なベクトル場の最大数を表し，Adams 数と呼ばれる．

Gauss 写像の退化性に関する Ferus の不等式について石川-木村-宮岡は次のような問題を提出した．

問題 3.1 ([13]) (1) 不等式 $r < F(l)$ は best possible か? つまり，$r = F(l)$ をみたす tangentially degenerate なはめ込み $M^l \longrightarrow S^n$ が存在するか?

(2) もし (1) が正しければ，$r = F(l)$ をみたす tangentially degenerate なはめ込み $M^l \longrightarrow S^n$ を分類せよ．

さらに，この問題に関連して次のような結果を与えた．

定理 3.2 (石川 [12]) 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ 内の tangentially degenerate な等質コンパクト超曲面は超平面か Cartan 超曲面に射影同値である．

定理 3.3 (宮岡) 球面内の 6 つの異なる主曲率を持つ等質等径超曲面の焦点部分多様体は tangentially degenerate である．さらに，これらは Ferus の不等式の等号をみたす．

定理 3.4 (石川-木村-宮岡 [13]) $M_\pm$ を球面内の 4 つの異なる主曲率を持つ等質等径超曲面の焦点部分多様体とする．このとき $M_\pm$ の一方は tangentially degenerate であり，もう一方は tangentially degenerate でない．さらに，これらの中に Ferus の不等式の等号を満たす例が無限個存在する．

これらの研究では球面内の等質等径超曲面の理論を用いて Gauss 写像が退化する部分多様体を調べている．球面内の等質超曲面は階数 2 の Riemann 対称対の s 表現の軌道として捉えることができる．そこで，こらの結果を踏まえて s 表現の軌道の Gauss 写像の退化性を調べ，次の結果を得た．

定理 3.5 ([10]) 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって，超球面内の Gauss 写像の退化する部分多様体となるものは，長い制限ルートの軌道 (制限ルートの長さが全て等しい場合はどの制限ルートでもよい) と制限ルート系が G_2 型のときの短い制限ルートの軌道に限られる．さらに，$\lambda \in R$ がこれらの制限ルートの一つだとすると $\ker(d\gamma)_\lambda = \mathfrak{m}_\lambda$ となる．したがって，軌道 $\mathrm{Ad}(K)\lambda$ の Gauss 写像の退化次数は λ の重複度に一致する．

注意 3.6 定理 2.3 から，これらの Gauss 写像が退化する軌道は球面内の弱鏡映部分多様体になる．

表 1 は階数が 2 以上の対称対の s 表現の軌道で Gauss 写像が退化するもののリストである．制限ルート系が G_2 型以外の場合は最高ルートを通る軌道が tangentially degenerate である．G_2 型の場合は長いルートを通る軌道と短いルートを通る軌道が共に tangentially degenerate であるが，これら二つの軌道は共に次元が等しく Gauss 写像の退化次数も等しい．表 1 では軌道の次元を l で，Gauss 写像の像の次元を r で表している．したがって，$l - r$ が Gauss 写像の退化次数になる．これらのリストの中から Ferus の不等式の等号 $r = F(l)$ を満たす例が数多く見つかる．

4 T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体

Riemann 多様体 $\tilde{M}$ 上の閉 k 次微分形式 α で，$T_x\tilde{M}$ の任意の k 次元部分空間 V について

$$\alpha|_V \leq \mathrm{vol}_V$$

となるとき，つまり T_xM の任意の正規直交系 $e_1, \ldots, e_k$ について $\alpha(e_1, \ldots, e_k) \leq 1$ となるとき，α を $\tilde{M}$ 上のキャリブレーションと呼ぶ．$\tilde{M}$ の k 次元部分多様体 M で任意の $x \in M$ において $\alpha|_{T_xM} = \mathrm{vol}_V$ となるとき，M は α によってキャリブレートされていると言う．Harvey-Lawson [6] はキャリブレートされた部分多様体はそのホモロジー類内で体積最小になることを示した．たとえば，Kähler 多様体 $(\tilde{M}, J, \omega)$ の複素 k 次元複素部分多様体は $\omega^k/k!$ によってキャリブレートされる．

$(\tilde{M}, J, \omega, \Omega)$ を複素 n 次元 Calabi-Yau 多様体とする．つまり，$(\tilde{M}, J, \omega)$ は Kähler 多様体であり，$\tilde{M}$ 上の正則 $(n, 0)$ 形式 Ω が

$$\frac{\omega^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^2 \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

を満たすとする．

type	rank	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	l	r	$l-r$
A	p	$\mathfrak{su}(p+1)$	$\mathfrak{so}(p+1)$	$2p-1$	$2p-2$	1
	p	$\mathfrak{su}(p+1)^2$	$\mathfrak{su}(p+1)$	$2(2p-1)$	$2(2p-2)$	2
	p	$\mathfrak{su}(2(p+1))$	$\mathfrak{sp}(p+1)$	$4(2p-1)$	$4(2p-2)$	4
	2	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{f}_4$	24	16	8
B	p	$\mathfrak{so}(2p+1)^2$	$\mathfrak{so}(2p+1)$	$8p-10$	$8p-12$	2
	p	$\mathfrak{so}(2p+n)$	$\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(p+n)$	$4p+2n-7$	$4p+2n-8$	1
C	p	$\mathfrak{sp}(p)$	$\mathfrak{u}(p)$	$2p-1$	$2p-2$	1
	p	$\mathfrak{sp}(p)^2$	$\mathfrak{sp}(p)$	$4p-2$	$4p-4$	2
	p	$\mathfrak{sp}(2p)$	$\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(p)$	$8p-5$	$8p-8$	3
	p	$\mathfrak{su}(2p)$	$\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{su}(p)\oplus\mathbf{R}$	$4p-3$	$4p-4$	1
	p	$\mathfrak{so}(4p)$	$\mathfrak{u}(2p)$	$8p-7$	$8p-8$	1
	3	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbf{R}$	33	32	1
D	p	$\mathfrak{so}(2p)$	$\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(p)$	$4p-7$	$4p-8$	1
	p	$\mathfrak{so}(2p)^2$	$\mathfrak{so}(2p)$	$2(4p-7)$	$2(4p-8)$	2
E_6	6	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{sp}(4)$	21	20	1
	6	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_6$	42	40	2
E_7	7	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{su}(8)$	33	32	1
	7	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_7$	66	64	2
E_8	8	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{so}(16)$	57	56	1
	8	$\mathfrak{e}_8\oplus\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{e}_8$	114	112	2
F_4	4	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{sp}(3)$	15	14	1
	4	$\mathfrak{f}_4\oplus\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{f}_4$	30	28	2
	4	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(6)$	21	20	1
	4	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{so}(12)$	33	32	1
	4	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{e}_7$	57	56	1
G_2	2	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{so}(4)$	5	4	1
	2	$\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_2$	10	8	2
BC	p	$\mathfrak{su}(2p+n)$	$\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{su}(p+n)\oplus\mathbf{R}$	$4p+2n-3$	$4p+2n-4$	1
	p	$\mathfrak{so}(4p+2)$	$\mathfrak{u}(2p+1)$	$8p-3$	$8p-4$	1
	p	$\mathfrak{sp}(2p+n)$	$\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(p+n)$	$8p+4n-5$	$8p+4n-8$	3
	2	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbf{R}$	21	20	1

表 1:

定義 4.1 $\theta \in \mathbb{R}$ をある定数として，Calabi-Yau 多様体 $(\tilde{M}, J, \omega, \Omega)$ 上のキャリブレーション $\mathrm{Re}(e^{i\theta}\Omega)$ によってキャリブレートされた部分多様体を特殊 Lagrange 部分多様体と呼ぶ.

命題 4.2 $(\tilde{M}, J, \omega, \Omega)$ を実 $2n$ 次元の Calabi-Yau 多様体とし，M は $\tilde{M}$ の n 次元の部分多様体とする．このとき，M が $\mathrm{Re}(\Omega)$ によってキャリブレートされた特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は $\omega|_L \equiv 0$ かつ $\mathrm{Im}(\Omega|_L) \equiv 0$ となることである.

Stenzel [18] は階数 1 のコンパクト対称空間 G/K の余接束 $T^*(G/K)$ に余等質性 1 の作用があることを利用して，Ricci 平坦を特徴付ける Monge-Ampère 方程式を常微分方程式に帰着させることにより，$T^*(G/K)$ 上に完備な Ricci 平坦計量が存在することを示した．ここでは，球面 $G/K = S^n$ の場合に Stenzel 計量がどのように与えられるか簡単に説明する．詳細は [18] を参照.

n 次元球面 $S^n \cong G/K = SO(n+1)/SO(n)$ の余接束を

$$T^*S^n = \left\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, \langle x, \xi \rangle = 0\right\}$$

と表す．S^n の任意の単位余接ベクトルは $SO(n+1)$ の作用で互いに移り合うので，T^*S^n には $SO(n+1)$ が余等質性 1 で作用する．T^*S^n は $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素二次超曲面

$$Q^n = \left\{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 1\right\} \cong G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$$

と写像

$$\begin{array}{rcl} \varphi : T^*S^n & \longrightarrow & Q^n \\ (x, \xi) & \longmapsto & x\cosh(\|\xi\|) + \sqrt{-1}\dfrac{\xi}{\|\xi\|}\sinh(\|\xi\|) \end{array}$$

によって微分同型になる．さらに写像 φ は $SO(n+1)$ の作用で同変である.

Q^n には $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素超曲面として複素構造 J が入るので，同一視 $T^*S^n \cong Q^n$ によって T^*S^n にも複素構造 J が誘導される．この複素構造に関して T^*S^n 上に完備な Ricci 平坦 Kähler 計量が次で与えられる.

$$\omega_{Stz} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(r^2) = \sqrt{-1}\sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} u(r^2) dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

ここで，$r^2 = \|z\|^2 = \sum_{i=0}^{n} z_i \bar{z}_i$ であり，u は c を正の定数として常微分方程式

$$\frac{d}{d\tau}(u'(\tau))^n = cn(\sinh\tau)^{n-1}$$

を満たす実数値関数である．特に，$n \geq 2$ の場合，T^*S^n は単連結であるから Stenzel 計量は Calabi-Yau 計量になる．実際，Q^n 上に

$$\Omega \wedge d(z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2) = dz_0 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

によって正則 $(n, 0)$ 形式 Ω が定義され，ある定数 λ が存在して

$$\omega_{Stz}^n = \lambda \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

となる．ここで，ω_{Stz} と Ω は共に $SO(n+1)$ の作用で不変であることを注意する．したがって，$(T^*S^n, J, \omega_{Stz}, \Omega)$ は余等質性 1 の Calabi-Yau 多様体である．

次に，この Calabi-Yau 多様体 $(T^*S^n, J, \omega_{Stz}, \Omega)$ 内の特殊 Lagrange 部分多様体の構成法について解説する．M が S^n の austere 部分多様体であるとし，$M \subset S^n$ の単位余法束を N^1M で表す．Harvey-Lawson [6] は写像

$$\begin{array}{rcl} \Phi : N^1M \times S^1 & \longrightarrow & S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \\ (v_x, e^{i\theta}) & \longmapsto & (\cos\theta x,\ \sin\theta v_x) \end{array}$$

によって S^{2n+1} 内の極小 Legendre 部分多様体を構成した．したがって，この上の錐を考えることによって $\mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 錐を得ることができる．しかし，一般にはこれによって構成される S^{2n+1} 内の Legendre 部分多様体は特異点を持つ．Borrelli-Gorodski [3] はこれを modify した写像 $\tilde{\Phi}$ を与え，特に M の全ての形作用素が 0 固有値を持たないならば $\tilde{\Phi}$ は Legendre はめ込みになることを示した．したがって，その上の錐は錐形特異点を持つ特殊 Lagrange 部分多様体になる．

次に，M が S^n 内の部分多様体であるとする．余法束 $L = N^*M$ は T^*S^n の n 次元部分多様体になり，T^*S^n の標準的なシンプレクティック構造 ω_0 に関して Lagrange 部分多様体になる．さらに，このとき次の定理が示される．

定理 4.3 (Karigiannis-Min-Oo [14]) S^n 内の部分多様体 M の余法束 $L = N^*M$ が T^*S^n の Stenzel 計量 ω_{Stz} に関する Lagrange 部分多様体になる．さらに，L が T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は M が S^n の austere 部分多様体になることである．

したがって，定理 2.3 で分類した austere 軌道から T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体の具体例が得られる．

別な手法として，Anciaux [1] は Stenzel 計量の群作用での不変性に着目し，Q^n 内において $SO(n)$ 不変な特殊 Lagrange 部分多様体を構成している．また，Inoel-Min-Oo [11] は運動量写像を用いてトーラス T^2 で不変な Q^3 内の特殊 Lagrange 部分多様体を分類し，その漸近挙動を調べている．さらに，彼らは Anciaux の構成した特殊 Lagrange 部分多様体について運動量写像を使た解釈を与えている．ここでは Anciaux の手法の拡張として，Q^n 内において $SO(p) \times SO(q)$ $(p + q = n + 1)$ の作用で不変な余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する．

I を $\mathbb{R}$ の開区間とする．複素平面 $\mathbb{C}$ 内の正則曲線 γ に対して，写像 Ψ を

$$\begin{array}{rcl}\Psi : I \times S^{p-1} \times S^{q-1} & \longrightarrow & Q^n \\ (s, x, y) & \longmapsto & \left(\gamma(s)x_1, \ldots, \gamma(s)x_p, \sqrt{1-\gamma(s)^2}y_1, \ldots, \sqrt{1-\gamma(s)^2}y_q\right)\end{array}$$

によって定義する．このとき，Ψ は $T^*S^n \cong Q^n$ の標準的シンプレクティック構造 ω_0 と Stenzel 計量 ω_{Stz} に関して共に Lagrange はめ込みになる．さらに，γ が微分方程式

$$\mathrm{Im}\left(\gamma'\gamma^{p-1}(1-\gamma^2)^{\frac{q-1}{2}}\right) = 0$$

を満たすとき，$\Psi(I \times S^{p-1} \times S^{q-1})$ は $T^*S^n \cong Q^n$ の特殊 Lagrange 部分多様体になる．

参考文献

[1] H. Anciaux, *Special Lagrangian submanifolds in the complex sphere*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), no. 2, 215–227.

[2] J. Berndt and H. Tamaru, *Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces*, J. Differential Geom. **63** (2003), no. 1, 1–40.

[3] V. Borrelli and C. Gorodski, *Minimal Legendrian submanifolds of S^{2n+1} and absolutely area-minimizing cones*, Differential Geom. Appl. **21** (2004), no. 3, 337–347.

[4] N. Bourbaki, *Groups et algebres de Lie*, Hermann, Paris, 1975.

[5] D. Ferus, *Totally geodesic foliations*, Math. Ann., **188** (1970), 313–316.

[6] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[7] D. Hirohashi, T. Kanno and H. Tasaki, *Area-minimizing of the cone over symmetric R-spaces*, Tsukuba J. Math., vol.24 no.1 (2000) pp.171–188.

[8] D. Hirohashi, H. Song, R. Takagi and H. Tasaki, *Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type*, Differential Geom. Appl., vol.13 no.2 (2000), 167–177.

[9] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, to appear in J. Math. Soc. Japan, arXiv:math/0612384.

[10] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Orbits of s-representations with degenerate Gauss mappings*, arXiv:0803.2391.

[11] M. Ionel and M. Min-Oo, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the deformed conifold*, arXiv:math/0504557.

[12] G. Ishikawa, *Developable hypersurfaces and homogeneous spaces in a real projective space*, Lobachevskii J. Math., **3** (1999), 113–125.

[13] G. Ishikawa, M. Kimura and R. Miyaoka, *Submanifolds with degenerate Gauss mappings in Spheres*, Advanced Studies in Pure Mathematics **37**, (2002), 115–149.

[14] S. Karigiannis and M. Min-Oo, *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), no. 4, 371–394.

[15] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 2, 571–612.

[16] Dominic S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, J. Differential Geometry, 8 (1973), 153–160.

[17] F. Podestà, *Some remarks on austere submanifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. B(7) **11** (1997), no.2, suppl., 157–160.

[18] M. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 2, 151–163.