Riemann 等質空間における交叉積分公式

酒井 高司　東京都立大学理学研究科

M と N を Riemann 等質空間 G/K の部分多様体で $\dim M+\dim N \geq \dim(G/K)$ を満たすとする。一方の M は固定したまま、もう一方の N を等長変換群 G の元 g の作用によって動かす。共通部分 $M\cap gN$ はほとんど全ての g について再び部分多様体となり、これにある積分不変量 $I(M\cap gN)$ を定義する。このとき積分

$$\int_G I(M\cap gN)d\mu_G(g)$$

の値を M と N の不変量によって表す等式は交叉積分公式と呼ばれている。特に、$\mathrm{vol}(M\cap gN)$ を積分不変量としたときは Poincaré の公式と呼ばれる。G/K が実空間形の場合、任意の部分多様体 M と N について Poincaré の公式は $\mathrm{vol}(M)$ と $\mathrm{vol}(N)$ の積の普遍定数倍で表されることが知られている (reference [10])。また、複素射影空間における任意の複素部分多様体についても、同様の結果が Santaló [9] によって示された。

Poincaré の公式以外にもよく知られた交叉積分公式がいくつかある。例えば、実空間形において、Weyl の管状近傍公式 [11] および一般化された Gauss-Bonnet の定理に現れる積分不変量に関する交叉積分公式が Chern [2] と Federer [3] によって得られている。また、M と N を $\mathbb{R}^3$ 内の閉曲面として

$$I(M\cap gN)=\int_{M\cap gN}\kappa^2 d\sigma$$

を積分不変量としたときの交叉積分公式は Chen の公式 [1] と呼ばれている。ここで κ は曲線 $M\cap gN$ の曲率を表わす。後に、Howard [5] は Riemann 等質空間 G/K において、第二基本形式に関する不変同次多項式によって積分不変量を一般的に定義し、G が部分多様体 M と N の接空間全体に推移的に作用しているとき、これらの積分不変量に関する交叉積分公式は M と N の積分不変量によって書き表されることを示した。これにより Poincaré の公式や Chern-Federer および Chen の交叉積分公式などを統一的に表示することに成功している。しかし、Howard の結果についてその明確な表示が分かっている例は少ない。本講演では実空間形における交叉積分公式の具体的な定式化について述べる。これは、Chern-Federer および Chen による交叉積分公式のある種の拡張にあたる。

参考文献

[1] C. S. Chen, *On the Kinematic Formula of Square of Mean Curvature Vector*, Indiana Univ. Math. J., **22** (1973), 1163–1169.

[2] S. S. Chern, *On the Kinematic Formula in Integral Geometry*, J. Math. Mech., **16** (1966), 101–118.

[3] H. Federer, *Curvature measure*, Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1959), 418–491.

[4] A. Gray, *Tubes*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.

[5] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106** (1993), vi + 69pp.

[6] H. J. Kang, T. Sakai and Y. J. Suh, *Kinematic formulas for hypersurfaces in real space forms*, preprint.

[7] S. Lee and S. P. Hong, *Tube formulas from Chern's kinematic formula*, Bull. Korean Math. Soc. **25** (1988), No. 2, 261–266.

[8] A. Nijenhuis, *On Chern's kinematic formula in integral geometry*, J. Diff. Geo. **9** (1974), 475–482.

[9] L. A. Santaló, *Integral geometry in Hermitian spaces*, Amer. J. Math. **74** (1952), 423–434.

[10] L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, London, 1977.

[11] H. Weyl, *On the volume of tubes*, Amer. J. Math. **61** (1939), 461–472.