複素球面内の特殊 Lagrange 部分多様体の構成について*

酒井 高司
大阪市立大学数学研究所

Introduction

Calabi-Yau 多様体内の特殊 Lagrange 部分多様体の概念は Harvey-Lawson [5] によって導入された．特殊 Lagrange 部分多様体はキャリブレート部分多様体であるため，ホモロジー類内での体積最小性という顕著な性質を持つ．また，弦理論との関係が指摘され，近年盛んに研究が行われている．特に，特殊 Lagrange ファイブレーションはミラー対称性に関する SYZ 予想において重要な役割を果たすと考えられている．

Riemann 多様体 M の余接束 T^*M には自然にシンプレクティック構造が入り，M の部分多様体 X の余法束 N^*X は T^*M の Lagrange 部分多様体になる．Harvey-Lawson は M が $\mathbb{R}^n$ の場合に N^*X が $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 部分多様体になるための条件を調べ，austere 部分多様体の概念を提起した．

Stenzel [11] は階数 1 のコンパクト対称空間の余接束に余等質性 1 の Calabi-Yau 計量を構成している．特に，2 次元球面の余接束 T^*S^2 の場合は Eguchi-Hanson 計量になる．本講演では T^*S^n の Stenzel 計量に関する特殊 Lagrane 部分多様体を構成する二つの手法について解説する．一つは Karigiannis-Min-Oo [8] による S^n 内の部分多様体の余法束として T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する方法である．これは Havery-Lawson の余法束の手法の類似になる．論文 [6] において弱鏡映部分多様体の概念を導入し，Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道の中で球面内の弱鏡映部分多様体になるものと austere 部分多様体になるものを分類した．これらの austere 軌道から T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成することができる．もう一つは，Stenzel 計量の対称性に注目して，余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する方法である．これは Anciaux [1] による構成法の一般化である．

1 Calabi-Yau metrics on T^*S^n

Stenzel [11] は階数 1 のコンパクト対称空間 G/K の余接束 $T^*(G/K)$ に余等質性 1 の作用があることを利用して，Ricci 平坦を特徴付ける Monge-Ampère 方程式を常微分方程式に帰着させることにより，$T^*(G/K)$ 上に完備な Ricci 平坦計量が存在することを示した．

*本研究は科学研究費補助金 若手研究 (B) 20740044 の助成を受けたものである．

ここでは，球面 $G/K = S^n$ の場合に Stenzel 計量がどのように与えられるか簡単に説明する．詳細は [11] を参照．

n 次元球面 $S^n \cong G/K = SO(n+1)/SO(n)$ の余接束を

$$T^*S^n = \big\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, \langle x, \xi\rangle = 0\big\}$$

と表す．S^n の任意の単位余接ベクトルは $SO(n+1)$ の作用で互いに移り合うので，T^*S^n には $SO(n+1)$ が余等質性 1 で作用する．T^*S^n は $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素二次超曲面

$$Q^n = \left\{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 1\right\} \cong G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$$

と写像

$$\begin{array}{rcl} \varphi : T^*S^n & \longrightarrow & Q^n \\ (x,\xi) & \longmapsto & x\cosh(\|\xi\|) + \sqrt{-1}\dfrac{\xi}{\|\xi\|}\sinh(\|\xi\|) \end{array}$$

によって微分同型になる．さらに写像 φ は $SO(n+1)$ の作用で同変である．

Q^n には $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素超曲面として複素構造 J が入るので，同一視 $T^*S^n \cong Q^n$ によって T^*S^n にも複素構造 J が誘導される．この複素構造に関して T^*S^n 上に完備な Ricci 平坦 Kähler 計量が次で与えられる．

$$\omega_{Stz} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(r^2) = \sqrt{-1}\sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} u(r^2) dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

ここで，$r^2 = \|z\|^2 = \sum_{i=0}^n z_i\bar{z}_i$ であり，u は c を正の定数として常微分方程式

$$\frac{d}{d\tau}(u'(\tau))^n = cn(\sinh\tau)^{n-1}$$

を満たす実数値関数である．特に，$n \geq 2$ の場合，T^*S^n は単連結であるから Stenzel 計量は Calabi-Yau になる．実際，Q^n 上に

$$\Omega \wedge d(z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2) = dz_0 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

によって正則 $(n,0)$ 形式 Ω が定義され，ある定数 λ が存在して

$$\omega_{Stz}^n = \lambda\Omega \wedge \bar{\Omega}$$

となる．ここで，ω_{Stz} と Ω は共に $SO(n+1)$ の作用で不変であることを注意する．したがって，$(T^*S^n, J, \omega_{Stz}, \Omega)$ は余等質性 1 の Calabi-Yau 多様体である．

2 Austere submanifolds in S^n

Harvey-Lawson は $\mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 錐を構成するために austere 部分多様体の概念を提起した．

定義 2.1 (Harvey-Lawson [5]) M を Riemann 多様体，X を M の部分多様体とする．X の各点の各法ベクトル ξ に対して X の形作用素 A_ξ の固有値全体のなす集合が -1 倍に関して不変であり，-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき，X を austere 部分多様体という．

定義から明らかに austere 部分多様体は極小部分多様体になる．また，2 次元場合，つまり曲面の場合は極小であることと austere であることは同値である．

Austere 部分多様体の定義は形作用素の対称性に着目しているので部分多様体の無限小対称性を表していると言うことができる．論文 [6] では austere 部分多様体のもつ対称性を大域化し，弱鏡映部分多様体の概念を定義した．

定義 2.2 ([6]) M を Riemann 多様体，X を M の部分多様体とする．各点 $x \in X$ における各法ベクトル $\xi \in N_xX$ に対して次の条件を満たす M の等長変換 σ_ξ が存在するとき，X を弱鏡映部分多様体という．

$$\sigma_\xi(x) = x, \qquad (d\sigma_\xi)_x\xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(X) = X. \tag{2.1}$$

σ_ξ を法ベクトル ξ に関する X の鏡映と呼ぶ．

Riemann 多様体 M の対合的等長変換 σ の固定点集合の連結成分 X を鏡映部分多様体という．このとき，σ は任意の点 $x \in X$ における任意の法ベクトル $\xi \in N_xX$ に対して条件 (2.1) をみたす．したがって，鏡映部分多様体は弱鏡映部分多様体である．

これらの部分多様体のクラスについて次の包含関係が成り立つ．

命題 2.3 　鏡映 $\subset$ 弱鏡映 $\subset$ austere $\subset$ 極小

次の命題は本質的には Podestà [10] による．

命題 2.4 Riemann 多様体の余等質性 1 の等長変換群の特異軌道は弱鏡映部分多様体になる．

コンパクト型対称空間の余等質性 1 の作用は Kollross [9] により分類されている．一方，非コンパクト型対称空間の場合の余等質性 1 の作用については Berndt-Tamaru [2] などにより研究が行われている．これらの結果から命題 2.4 により，Riemann 対称空間内の弱鏡映部分多様体の例が得られる．

論文 [6] において，既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって球面内の弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体になるものを分類した．定理にあるルートの表記は [4] に従う．

定理 2.5 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって，超球面内の austere 部分多様体となるものは次の制限ルート系における指定したベクトルを通る軌道に限られる．

(1) 制限ルート

(2) 制限ルート系 A_2 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ のベクトル $2e_1 - e_2 - e_3$，$e_1 + e_2 - 2e_3$

(3) 制限ルート系 A_3 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ のベクトル $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4) 制限ルート系 D_r 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル e_1

(5) 制限ルート系 D_4 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

(6) 重複度一定の制限ルート系 B_2 型 $\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル $e_1 + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ (主軌道)

(7) 制限ルート系 G_2 型のベクトル $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$ (主軌道)

さらに，これらの中で超球面内の弱鏡映部分多様体となるものは (1)〜(5) の場合に限られる．

3 Special Lagrangian submanifolds in T^*S^n

3.1 Special Lagrangian geometry

Riemann 多様体 M 上の閉 k 次微分形式 α で，T_xM の任意の k 次元部分空間 V について

$$\alpha|_V \leq \mathrm{vol}_V$$

となるとき，つまり T_xM の任意の正規直交系 $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ について $\alpha(e_1, e_2, \ldots, e_k) \leq 1$ となるとき，α を M 上のキャリブレーションと呼ぶ．M の k 次元部分多様体 X で任意の $x \in X$ において $\alpha|_{T_xX} = \mathrm{vol}_{T_xX}$ となるとき，X は α によってキャリブレートされていると言う．Harvey-Lawson [5] はキャリブレートされた部分多様体はそのホモロジー類内で体積最小になることを示した．たとえば，Kähler 多様体 (M, J, ω) の複素 k 次元複素部分多様体は $\omega^k/k!$ によってキャリブレートされる．

(M, J, ω, Ω) を複素 n 次元 Calabi-Yau 多様体とする．つまり，(M, J, ω) は Kähler 多様体であり，M 上の正則 $(n, 0)$ 形式 Ω が

$$\frac{\omega^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

を満たすとする．

定義 3.1 $\theta \in \mathbb{R}$ をある定数として，Calabi-Yau 多様体 (M, J, ω, Ω) 上のキャリブレーション $\mathrm{Re}(e^{i\theta}\Omega)$ によってキャリブレートされた部分多様体を特殊 Lagrange 部分多様体と呼ぶ．

命題 3.2 (M, J, ω, Ω) を実 $2n$ 次元の Calabi-Yau 多様体とし，L は M の n 次元の部分多様体とする．このとき，L が $\mathrm{Re}(\Omega)$ によってキャリブレートされた特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は $\omega|_L \equiv 0$ かつ $\mathrm{Im}(\Omega|_L) \equiv 0$ となることである．

3.2 Conormal bundle construction

X が S^n の austere 部分多様体であるとし，$X \subset S^n$ の単位余法束を N^1X で表す．Harvey-Lawson [5] は写像

$$\begin{array}{rcl} \Phi : N^1X \times S^1 & \longrightarrow & S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \\ (v_x, e^{i\theta}) & \longmapsto & (\cos\theta x,\ \sin\theta v_x) \end{array}$$

によって S^{2n+1} 内の Legendre 部分多様体を構成した．したがって，この上の錐を考えることによって $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の特殊 Lagrange 錐を得ることができる．しかし，一般にはこれによって構成される S^{2n+1} 内の Legendre 部分多様体は特異点を持つ．Borrelli-Gorodski [3] はこれを modify した写像 $\tilde{\Phi}$ を与え，特に X の全ての形作用素が 0 固有値を持たないならば $\tilde{\Phi}$ は Legendre はめ込みになることを示した．したがって，その上の錐は錐形特異点を持つ特殊 Lagrange 部分多様体になる．

次に，X が S^n 内の部分多様体であるとする．余法束 $L = N^*X$ は T^*S^n の n 次元部分多様体になり，T^*S^n の標準的なシンプレクティック構造 ω_0 に関して Lagrange 部分多様体になる．さらに，このとき次の定理が示される．

定理 3.3 (Karigiannis-Min-Oo [8]) S^n 内の部分多様体 X の余法束 $L = N^*X$ が T^*S^n の Stenzel 計量 ω_{Stz} に関する Lagrange 部分多様体になる．さらに，L が T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は X が S^n の austere 部分多様体になることである．

したがって，定理 2.5 で分類した austere 軌道から T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体の具体例が得られる．

3.3 Cohomogeneity one special Lagrangian construction

Anciaux [1] は Stenzel 計量の群作用での不変性に着目し，Q^n 内において $SO(n)$ 不変な Lagrange 部分多様体を構成している．また，Inoel-Min-Oo [7] は運動量写像を用いてトーラス T^2 で不変な Q^3 内の特殊 Lagrange 部分多様体を分類し，その漸近挙動を調べている．さらに，彼らは Anciaux の構成した特殊 Lagrange 部分多様体について運動量写像を使った解釈を与えている．ここでは Anciaux の手法の拡張として，Q^n 内において $SO(p) \times SO(q)$ $(p + q = n + 1)$ の作用で不変な余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する．

I を $\mathbb{R}$ の開区間とする．複素平面 $\mathbb{C}$ 内の正則曲線 γ に対して，写像 Ψ を

$$\begin{array}{rcl} \Psi : I \times S^{p-1} \times S^{q-1} & \longrightarrow & Q^n \\ (s, x, y) & \longmapsto & \left(\gamma(s)x_1, \ldots, \gamma(s)x_p, \sqrt{1-\gamma(s)^2}y_1, \ldots, \sqrt{1-\gamma(s)^2}y_q\right) \end{array}$$

によって定義する．このとき，Ψ は $T^*S^n \cong Q^n$ の標準的シンプレクティック構造 ω_0 と Stenzel 計量 ω_{Stz} に関して共に Lagrange はめ込みになる．さらに，γ が微分方程式

$$\mathrm{Im}\left(\gamma'\gamma^{p-1}(1-\gamma^2)^{\frac{q-2}{2}}\right) = 0$$

を満たすとき，$\Psi(I \times S^{p-1} \times S^{q-1})$ は $T^*S^n \cong Q^n$ の特殊 Lagrange 部分多様体になる．

参考文献

[1] H. Anciaux, *Special Lagrangian submanifolds in the complex sphere*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), no. 2, 215–227.

[2] J. Berndt and H. Tamaru, *Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces*, J. Differential Geom. **63** (2003), no. 1, 1–40.

[3] V. Borrelli and C. Gorodski, *Minimal Legendrian submanifolds of S^{2n+1} and absolutely area-minimizing cones*, Differential Geom. Appl. **21** (2004), no. 3, 337–347.

[4] N. Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie*, Hermann, Paris, 1975.

[5] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[6] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, to appear in J. Math. Soc. Japan, arXiv:math/0612384.

[7] M. Ionel and M. Min-Oo, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the deformed conifold*, arXiv:math/0504557.

[8] S. Karigiannis and M. Min-Oo, *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), no. 4, 371–394.

[9] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 2, 571–612.

[10] F. Podestà, *Some remarks on austere submanifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. B(7) **11** (1997), no.2, suppl., 157–160.

[11] M. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 2, 151–163.